**ALLEGATO B**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO**
**selezione pubblica per n. 1 posto di Ricercatore a tempo determinato in tenure track (RTT) per il settore concorsuale 01/A2 - Geometria e Algebra, settore scientifico-disciplinare MAT/03 – Geometria presso il Dipartimento di MATEMATICA "FEDERIGO ENRIQUES", (avviso bando pubblicato sulla G.U. n.97 del 22/12/2023).**
**Codice concorso: 5467**

# [Riccardo Pengo]
# CURRICULUM VITAE

## INFORMAZIONI PERSONALI

| | |
|---|---|
| COGNOME | PENGO |
| NOME | RICCARDO |
| DATA DI NASCITA | 21 DICEMBRE 1993 |
| INDIRIZZO EMAIL | PENGO@MATH.UNI-HANNOVER.DE |
| SITO WEB | SITES.GOOGLE.COM/VIEW/RICCARDOPENGO/ |

## TITOLI

### TITOLI DI STUDIO

Diploma di scuola superiore, Liceo Scientifico Albert Einstein, Milano, luglio 2012
Laurea Triennale in Matematica, Univeristà degli Studi di Milano, 16 luglio 2015
ALGANT Master, Università degli Studi di Milano/Università di Leida, 26 luglio 2017

### EQUIVALENTE DEL TITOLO DI DOTTORE DI RICERCA

Dottorato in matematica (*Ph.d.-graden i Matematik*), Università di Copenaghen (Danimarca), 18 ottobre 2020

### CONTRATTI DI RICERCA, ASSEGNI DI RICERCA O EQUIVALENTI

[01/11/2020 - 31/10/2022]
“MILYON postdoc”, Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[01/11/2022-30/09/2023]
“Postdoctoral fellow”, Istituto Max Planck di Matematica (Germania)
[01/10/2023 - presente]
“Postdoc”, Università di Hannover (Germania)

## ATTIVITÀ DIDATTICA A LIVELLO UNIVERSITARIO IN ITALIA O ALL'ESTERO

[01/10/2016 - 16/12/2016]
"Mathematics for Statisticians" A.A. 2016/17, Università di Leida (Paesi Bassi),
"Master's specialisation in Statistical Science for the Life & Behavioural sciences",
Durata: 20 ore
Ruolo: Esercitatore
Argomenti del corso: Logaritmi, trigonometria, calcolo in una variabile reale.

[23/04/2018-15/06/2018]
"Topics in Algebra and Number Theory", A.A. 2017/18,
Università di Copenaghen (Danimarca), "Master in Mathematics"
Durata: 40 ore
Ruolo: Insegnante principale
Argomenti del corso: Numeri p-adici, teoria del corpo delle classi locale e globale.

[19/11/2018-25/01/2019]
"Topics in Algebra and Number Theory", A.A. 2018/19,
Università di Copenaghen (Danimarca), "Master in Mathematics",
Durata: 15 ore
Ruolo: Esercitatore
Argomenti del corso: Altezze in geometria aritmetica, e la congettura di Colmez.

[23/04/2019 – 23/06/2019]
"Algebraic number theory", A.A.2018/19,
Università di Copenaghen (Danimarca), "Master in Mathematics",
Durata: 21 ore
Ruolo: Esercitatore
Argomenti del corso: Campi di numeri, anelli degli interi, gruppi delle classi e delle unità.

[01/03/2021 – 30/04/2021]
"M1 English Seminar", A.A. 2020/21,
Scuola normale superiore di Lione (Francia), "M1 de Mathématiques",
Durata: 15 ore
Ruolo: Correzione e supervisione di elaborati scritti in lingua inglese
Argomenti del corso: Svariati, tratti da diversi articoli scritti in lingua inglese.

[28/03/2022 – 30/03/2022]
"An introduction to Mahler's measure", A.A. 2021/22,
Università di Stellenbosch (Sudafrica), "Master and PhD in mathematics"
Durata: 6 ore
Ruolo: Insegnante principale
Argomenti del corso: Misure di Mahler, problema di Lehmer e valori speciali di funzioni L.

[29/08/2022 – 05/09/2022]
"M2 refresher course", A.A. 2022/23,
Scuola normale superiore di Lione (Francia), "M2 de Mathématiques"
Durata: 6 ore
Ruolo: Insegnante principale
Argomenti del corso: Richiami di algebra commutativa, teoria delle categorie e delle rappresentazioni.

[13/11/2023-24/11/2023]
"Galois representations and their entanglements", A.A. 2023/24,
Stellenbosch University (Sudafrica), "Master and PhD in mathematics"
Durata: 8 ore
Ruolo: Insegnante principale
Argomenti del corso: Rappresentazioni di Galois, teorema dell'immagine aperta di Serre ed intrecciamento dei campi di divisione di curve ellittiche.

## ATTIVITÀ DI SUPERVISIONE

[01/09/2023-30/09/2023]
Supervisione dello stage di Boldizsar Mann, Samuel Meyer and Yannick Sommer, vincitori della competizione "Bundeswettbewerb Mathematik", all'istituto Max Planck di matematica di Bonn.

## DOCUMENTATA ATTIVITÀ DI FORMAZIONE O DI RICERCA PRESSO QUALIFICATI ISTITUTI ITALIANI O STRANIERI;

[01/03/2019-12/04/2019, 25/11/2019-13/12/2019]
Soggiorni di ricerca presso la scuola normale superiore di Lione (Francia).
Invitato da François Brunault.
[02/09/2019-13/09/2019]
Soggiorno di ricerca presso l'università Radboud di Nijmegen (Paesi Bassi).
Invitato da Wadim Zudilin.
[13/09/2021-17/09/2021]
Soggiorno di ricerca presso l'università di Ratisbona (Germania).
Invitato da Walter Gubler e Roberto Gualdi.
[17/01/2022-21/01/2022]
Soggiorno di ricerca presso l'università di Udine (Italia).
Invitato da Pietro Corvaja e Paolo Dolce.
[23/01/2023-27/01/2023]
Soggiorno di ricerca presso l'università di Gottinga (Germania).
Invitato da Victoria Cantoral-Farfán ed Evelina Viada
[12/06/2023-17/06/2023, 15/01/2024-18/01/2024]
Soggiorni di ricerca presso l'università di Gottinga (Germania).
Invitato da Evelina Viada.

## ATTIVITÀ DI RELATORE A SEMINARI E CONVEGNI NAZIONALI E INTERNAZIONALI

[10/11/2017]
"An adelic description of modular curves"
"Number Theory Seminar", Università di Copenaghen (Danimarca)
[03/04/2019]
"Mahler's measure, reciprocality and special values of L-functions"
"Une petite journée GANDA", IMB Bordeaux (Francia),
[20/05/2019]
"Mahler's measure and special values of L-functions"
"N-Cube Days X", Accademia Åbo (Finlandia)
[15/08/2019]
"Arithmetic geometry and toric varieties: the example of Mahler's measure"
"Discrete Math seminar", Università tecnica di Eindhoven (Paesi Bassi)
[06/09/2019]
"Mahler's measure and elliptic curves with complex multiplication"
"Intercity Number Theory Seminar", Università Radboud di Nijmegen (Paesi Bassi)
[12/12/2019]
"Mahler's measure and elliptic curves with complex multiplication"
"Séminaire d'arithmétique à Lyon", Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[08/05/2020]
"Mahler measure: from small numbers to big conjectures"
"Number Theory Seminar", Università di Copenaghen (Danimarca)

[08/06/2020]
"From L-functions to Mahler measures and back"
“Algebra, geometry and number theory seminar”, Università di Leida (Paesi Bassi)
[03/12/2020]
"Mesures de Mahler, multiplications complexes et exactitude"
“Séminaire Arithmétique et géométrie algébrique”, IRMA Strasburgo (Francia)
[13/04/2021]
"Entanglement in the family of division fields of a CM elliptic curve"
“Number Theory Seminar”, Università del Lussemburgo (Lussemburgo).
[17/05/2021]
"Entanglement in the family of division fields of a CM elliptic curve"
“Webinar in Number Theory”, Laboratorio internazionale di ricerca franco-coreano.
[08/06/2021]
"Mahler measure of successively exact polynomials"
“Japan Europe Number Theory Exchange Seminar”
[24/06/2021]
"Entanglement in the family of division fields of a CM elliptic curve"
“Formes modulaires et théorie des représentations, Università di Sfax (Tunisia)
[01/07/2021]
"Mesures de Mahler des polynômes successivement exacts"
“Journée Vincent Pilloni”, Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[08/07/2021]
"Enchevêtrement dans la famille des corps de division d'une courbe elliptique à multiplications complexes",
“Rencontre Théorie des nombres”, LMBP Clermont-Ferrand (Francia)
[17/08/2021]
"Entanglement in the family of division fields of a CM elliptic curve"
“Young Researchers in Algebraic Number Theory”, Università di Bristol (Regno Unito)
[17/08/2021]
"Mahler measures, special values and exactness: a periodic journey"
“GADEPs Seminar”, IMPA Rio de Janeiro (Brasile)
[10/09/2021]
"Mahler measure of successively exact polynomials",
“Intercity Seminar on Arakelov Geometry”, Università di Ratisbona (Germania)
[09/11/2021]
"Variétés ouvertes et formes quadratiques pour les valeurs spéciales de fonctions L"
“Singularités, perversité et calculs quadratiques”, IMB Digione (Francia)
[12/01/2022]
"Constructing CM elliptic curves with minimal Galois image"
“16th Atelier PARI/GP”, LMB Besançon (Francia)
[18/01/2022]
"Limiti di misure di Mahler e polinomi successivamente esatti"
“Seminario di Teoria dei Numeri”, Università degli Studi di Udine (Italia)
[10/02/2022]
"Enchevêtrement et indices pour les courbes elliptiques à multiplication complexe"
“Séminaire d'arithmétique à Lyon”, ENS Lyon (Francia)
[16/02/2022]
"Limits of Mahler measures, and (successively) exact polynomials"
“Linfoot Number Theory Seminar”, Università di Bristol (Regno Unito)
[17/03/2022]
"Limits of Mahler measures, and (successively) exact polynomials"
“Seminario di Teoria dei Numeri”, Università degli Studi di Padova (Italia)

[16/06/2022]
"Mahler measures and exactness: a periodic stroll"
“Motives and arithmetic groups”, IRMA Strasburgo (Francia)
[27/06/2022]
"Limits of Mahler measures and exactness of polynomials"
“Special Values of L-functions, Periods, and Fundamental Groups”
Collegio “All Souls”, Università di Oxford (Regno Unito)
[19/08/2022]
"Limits of Mahler measures in multiple variables"
“28th Nordic Congress of Mathematicians”, Università di Aalto (Finlandia)
[12/09/2022]
"Standard conjectures for arithmetic Grassmannians, and a new description of their Arakelov Chow ring"
“Intercity Seminar on Arakelov Geometry”, ICMAT & IMUB Madrid (Spagna)
[13/10/2022]
"Conjectures standard en géométrie d'Arakelov: l'exemple des Grassmanniennes"
“Séminaire d'arithmétique à Lyon”, Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[20/10/2022]
"Propriétés de Northcott et valeurs spéciales des fonctions L"
“Séminaire de théorie de nombres”, IMT Tolosa (Francia)
[08/11/2022]
"On the Northcott property for special values of L-functions"
“Humboldt Arithmetic Geometry Seminar”, Università Humboldt di Berlino (Germania)
[24/11/2022]
"On the Northcott property for special values of L-functions"
“Luxembourg Number Theory Seminar”, Università del Lussemburgo (Lussemburgo)
[14/12/2022]
"Limits of Mahler measures and successively exact polynomials"
“Number Theory Lunch seminar”, Istituto Max Planck di matematica di Bonn (Germania)
[24/01/2023]
"Entanglement and indices for CM elliptic curves"
“Oberseminar on Diophantine Geometry”, Università di Gottinga (Germania)
[07/02/2023]
"Propriétés de Northcott pour les valeurs spéciales des fonctions L"
“Séminaire de Théorie de Nombres”, LMBP Clermont-Ferrand (Francia)
[09/02/2023]
"Limites des mesures de Mahler et polynômes successivement exacts"
“Séminaire de Théorie de Nombres”, Istituto Fourier di Grenoble (Francia)
[08/03/2023]
"Mahler measures of exact polynomials and Eisenstein series"
“Motives and automorphic forms”,
Istituto Max-Planck di matematica di Bonn (Germania)
[03/04/2023]
"Entanglement and indices for CM elliptic curves"
“Density problems in arithmetics”, CIRM Luminy (Francia)
[13/04/2023]
"Limits of Mahler measures and successively exact polynomials"
“Number Theory Seminar”, Università di Basilea (Svizzera)
[04/05/2023]
"p-adic Mahler measures and Iwasawa invariants of towers of graphs"
“The 7th mini symposium of the Roman Number Theory Association”, Roma (Italia)

[13/06/2023]
"Uniform homotheties and rational points"
“Oberseminar on Diophantine Geometry”, Università di Gottinga (Germania)
[06/07/2023]
"Mahler measures of successively exact polynomials"
“XXXIIémes Journées arithmétiques”, IECL Nancy (France)
[29/08/2023]
"Standard conjectures in Arakelov geometry: from the projective space to Grassmannians"
“Arakelov geometry on Shimura varieties”, Università di Copenaghen (Danimarca)
[12/10/2023]
"Standard conjectures in Arakelov geometry: from the projective space to Grassmannians"
“Global Invariants of Arithmetic Varieties”, CIRM Luminy (Francia)
[13/10/2023]
"Théorie d'Iwasawa pour les graphes et mesures de Mahler p-adiques"
“Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux”, IMB Bordeaux (Francia)
[20/10/2023]
"Limits of Mahler measures and successively exact polynomials"
“Research Seminar Number Theory and Arithmetic Geometry”
Università di Hannover (Germania)
[24/10/2023]
"Mahler measures of successively exact polynomials"
“MM(P): Mahler Measures of Polynomials”, Università Radboud di Nijmegen (Paesi Bassi)
[08/11/2023]
"Standard conjectures in Arakelov geometry: from the projective space to Grassmannians"
“The Bielefeld Algebraic and Arithmetic Geometry Seminar”
Università di Bielefeld (Germania)
[22/11/2023]
"Iwasawa theory: climbing up towers, from numbers to graphs"
“Colloquium”, Università di Stellenbosch (Sudafrica)
[12/12/2023]
"Limits of Mahler measures and successively exact polynomials"
“Seminario di Teoria dei Numeri”, Università degli Studi di Genova (Italia)
[09/01/2024]
"Limites des mesures de Mahler et polynômes successivement exacts"
“Séminaire d'algèbre et géométrie”, LMV Versailles (Francia)

**PARTECIPAZIONE A GRUPPI DI RICERCA INTERNAZIONALI**

[2020-presente]
“GDRI/IRN GANDA”
Principali responsabili: Yuri Bilu e Fabien Pazuki
[2021-presente]
“ANR HQDIAG”
Principali responsabili: Adrien Dubouloz e Frédéric Déglise

**PARTECIPAZIONE A GRUPPI DI LAVORO**

[Anno Accademico 2018/19]
"Integral p-adic Hodge theory (after Bhatt-Morrow-Scholze)"
Università di Copenaghen (Danimarca)
[Anno Accademico 2019/20]
"Prismatization (after Drinfeld)"
Università di Copenaghen (Danimarca)
"The Schinzel-Zassenhaus conjecture (after Dimitrov)"
Università di Basilea (Svizzera)
[Anno Accademico 2020/21]
"Homologie stable réelle des groupes arithmétiques (d'après Borel)"
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
"Uniformity in Manin-Mumford's conjecture (after de Marco, Krieger and Ye)"
Università di Basilea (Svizzera)
"Variations sur un thème de Rost"
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
"Vecteurs localement analytiques dans la cohomologie complété des courbes modulaires (d'après Pan)"
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[Anno Accademico 2021/22]
"Adelic line bundles (after Yuan and Zhang)"
Università di Basilea (Svizzera)
"Problèmes diophantiennes et applications de périodes p-adiques (d'après Lawrence et Venkatesh)"
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
"Géométrie réelle, motifs et A1 -homotopie (d'après Scheiderer et Bachmann)"
Progetto ANR HQDIAG (Francia)
"Variations of Hodge structures and regulators (after Kerr and Pearlstein)"
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[Anno Accademico 2022/23]
"Composantes connexes en A1-homotopie (after Ayoub, Balwe and Sawant)"
Progetto ANR HQDIAG (Francia)
"Study group on periods"
Istituto Max Planck di Matematica, Bonn (Germania)

**ATTIVITÀ DI RELATORE IN GRUPPI DI LAVORO E SEMINARI DIVULGATIVI**

[12/10/2018]
"A (not quite) perfect(oid) talk"
"Integral p-adic Hodge theory", Università di Copenaghen (Danimarca)
[28/11/2018]
"The cotangent complex"
"Topics in topology", Università di Copenaghen (Danimarca)
[12/12/2018]
"On Lubin-Tate theory"
"Topics in topology", Università di Copenaghen (Danimarca)
[27/09/2019]
"What is... an L-function?"
"What is?" Seminar, Università di Copenaghen (Danimarca)
[07/02/2020]
"Chern classes and two counterexamples"
"Prismatisation learning seminar", Università di Copenaghen (Danimarca)

[02/11/2020]
"Théorie de Hodge pour les variétés Riemanniennes non compactes"
“Homologie stable réelle des groupes arithmétiques”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[30/11/2020]
"Le théorème de Matsushima"
“Homologie stable réelle des groupes arithmétiques”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[09/03/2021]
"Foncteurs dérivés des vecteurs localement analytiques"
“Vecteurs localement analytiques dans la cohomologie complété des courbes modulaires”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[29/10/2021]
"Mixed coefficients and essentially quasi-projective schemes"
“Study group on adelic line bundles”, Università di Basilea (Svizzera)
[02/12/2021, 09/12/2021, 16/12/2021]
"Points rationnels et applications des périodes"
“Problèmes diophantiennes et applications de périodes p-adiques”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[07/01/2022]
"Intersection theory and Deligne pairings",
“Study group on adelic line bundles”, Università di Basilea (Svizzera)
[04/02/2022, 11/02/2022]
"Points et compatibilité aux limites du site réel-étale"
“Géométrie réelle, motifs et A1-homotopie”, Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[23/03/2022]
"Exact polynomials and admissible variations of mixed Hodge structures"
“Variations of Hodge structures and regulators”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[11/04/2022]
"Absolute Hodge cohomology and Deligne cohomology"
“Variations of Hodge structures and regulators”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[11/05/2022, 18/05/2022]
"Limits of Abel-Jacobi maps, and regulators on normal crossing divisors"
“Variations of Hodge structures and regulators”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[12/10/2022]
"The Green-Griffiths approach to the Hodge conjecture"
“Variations of Hodge structures and regulators”
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
[25/05/2023]
"Ayoub's counterexamples to Morel's connectivity conjectures"
“Composantes connexes en A1-homotopie”
ANR HQDIAG (Francia)
[06/07/2023]
"Naive A1-homotopies of ruled surfaces (after Balwe-Sawant)"
“Composantes connexes en A1-homotopie”
ANR HQDIAG (Francia)
[27/07/2023]
"Motivic Mahler measures, single valued periods and successively exact polynomials"
“Study group on periods”, Istituto Max Planck per la Matematica (Germania)

## ORGANIZZAZIONE DI CONVEGNI ED EVENTI ACCADEMICI

[27/08/2023-31/08/2023]
Masterclass "Mahler measures and special values of L-functions"
Università di Copenaghen (Danimarca)
Organizzata in collaborazione con Fabien Pazuki
[19/05/2021-21/05/2021]
Conferenza "RSVP: Rendez-vous on special values and periods"
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
Organizzata in collaborazione con Giada Grossi
[23/08/2022]
Convegno "ALGANT Alumni Network Welcome Day"
Online
Organizzato in collaborazione con Riccardo Gilblas e Stevell Müller
[17/03/2023]
Conferenza "Kimingala: celebrating Ian Kiming's mathematics"
Università di Copenaghen (Danimarca)
Organizzata in collaborazione con Bryan William Advocaat
[12/05/2023]
Scuola "Spring school in Arithmetic Statistics"
CIRM Luminy (Francia)
Organizzata in collaborazione con Samuele Anni, Nirvana Coppola, Eugenia Rosu e Peter Stevenhagen
[29/09/2023]
Convegno "ALGANT Alumni Network Welcome Day"
Online

## ORGANIZZAZIONE DI SEMINARI

[01/10/2021-31/10/2022]
"Séminaire d'arithmétique à Lyon"
Scuola normale superiore di Lione (Francia)
Organizzato in collaborazione con Gabriel Dospinescu
[01/10/2023-presente]
"Oberseminar in Diophantine geometry"
Università di Gottinga (Germania)
Organizzato in collaborazione con Evelina Viada

## REVISIONE DI ARTICOLI

Dal 2021 ad oggi, ho revisionato articoli per i seguenti giornali: Expositiones Mathematicae; International Journal of Number Theory; Journal of Number Theory; Ramanujan Journal.

Scrivo inoltre regolarmente recensioni per MathReviews e zbMATH.

## LINGUE STRANIERE PARLATE

Inglese, livello C2
Francese, livello B2/C1
Spagnolo, livello B1
Tedesco, livello A2/B1

**COMPETENZA INFORMATICA RELATIVA A SOFTWARE SPECIALISTICO**

PARI/GP, livello avanzato
SAGEMath, livello intermedio
MAGMA, livello intermedio

**ATTIVITÀ DI DIVULGAZIONE SCIENTIFICA**

[Anno accademico 2015/16]
Conduttore del programma “Breaking Lab!” di Radio Statale, presso l’Università Statale di Milano.
[01/06/2022]
"Small heights and periodic journeys: my first steps in mathematics"
“Algant Alumni Network Seminar”, Online

## PRODUZIONE SCIENTIFICA

**PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE** *(le date fra parentesi quadre fanno riferimento alla pubblicazione su arXiv)*

[2020.05.08]
Titolo: “Mahler's measure and elliptic curves with potential complex multiplication”
Autori: R. Pengo
Stato: Preprint
DOI: 10.48550/arXiv.2005.04159
[2020.06.01]
Titolo: “Entanglement in the family of division fields of elliptic curves with complex multiplication”
Autori: F. Campagna & R. Pengo
Stato: Pubblicato
Referenza: Pacific Journal of Mathematics, 317 (2022) 21-66
Data di pubblicazione: 19 giugno 2022
Luogo di pubblicazione: Berkeley, California, Stati Uniti
DOI: 10.2140/pjm.2022.317.21
[2020.10.18]
Titolo: “Mahler measures, special values of L-functions and complex multiplication”
Autori: R. Pengo
Stato: Tesi di dottorato, pubblicata
Referenza: Edizioni dell’Università di Copenaghen
Data di pubblicazione: 18 ottobre 2020
Luogo di Pubblicazione: Copenaghen, Danimarca
ISBN: 978-87-7125-035-0
[2020.12.01]
Titolo: “On the Northcott property for special values of L-functions”
Autori: F. Pazuki & R. Pengo
Stato: Accettato per la pubblicazione
Referenza: Revista Matemática Iberoamericana (2023), published online first
Data di pubblicazione: 15 dicembre 2023
Luogo di pubblicazione: Online
DOI: 10.4171/rmi/1454
[2022.01.11]
Titolo: “How big is the image of the Galois representations attached to CM elliptic curves?”
Autori: F. Campagna & R. Pengo
Stato: Pubblicato
Referenza: Contemporary Mathematics, Vol. 779 (2022), pp. 41-56

Data di pubblicazione: Giugno 2022
Luogo di pubblicazione: Stati Uniti d'America
DOI: 10.1090/conm/779/15670

[2022.03.23]
Titolo: "Limits of Mahler measures in multiple variables"
Autori: F. Brunault, A. Guilloux, M. Mehrabdollahei & R. Pengo
Stato: Accettato per la pubblicazione
Referenza: Annales de l'Institut Fourier, à paraître
Data di accettazione: Novembre 2022
Luogo di pubblicazione: Grenoble, Francia
DOI: 10.48550/arXiv.2203.12259

[2023.10.24]
Titolo: "Spanning trees in Z-covers of a finite graph and Mahler measures"
Autori: R. Pengo & D. Vallières
Stato: Articolo inviato per la revisione fra pari presso un giornale specializzato
DOI: 10.48550/arXiv.2310.15619

[2023.10.31]
Titolo: "Irreducibility criteria for the preimages of a transverse variety under endomorphisms of products of elliptic curves"
Autori: R. Pengo & E. Viada
Stato: Articolo inviato per la revisione fra pari presso un giornale specializzato
DOI: 10.48550/arXiv.2310.20665

**DESCRIZIONE DEGLI INTERESSI SCIENTIFICI**

[Introduzione]

I miei interessi di ricerca fanno globalmente parte della teoria dei numeri, dai suoi aspetti più algebrici a quelli più analitici. Inoltre, alcuni ambiti della mia ricerca si collocano più specificamente nella geometria aritmetica, ovvero quella disciplina situata all'intersezione fra teoria dei numeri e geometria algebrica, che utilizza strumenti e tecniche mutuate dalla geometria algebrica per studiare problemi aritmetici.
Più precisamente, i miei interessi di ricerca sono volti allo studio dei cosiddetti "valori speciali" delle funzioni L associate ad una rappresentazione del gruppo di Galois assoluto di un campo di numeri, e alle loro relazioni con altezze di vario tipo.
I suddetti valori speciali sono dei numeri reali definiti come i primi coefficienti non nulli nelle espansioni in serie di Laurent delle funzioni L in questione. Tali funzioni, congetturalmente meromorfe ovunque nel piano complesso, consentono di studiare con metodi analitici le proprietà algebriche delle rappresentazioni di Galois da cui provengono. Inoltre, come mostrato da Deninger, i valori speciali negli interi di una funzione L sono sufficienti a determinarla.
D'altro canto, le altezze a cui facevamo riferimento sono anch'esse dei numeri reali, che consentono di misurare la complessità di un oggetto aritmetico di interesse, come ad esempio una varietà definita su un campo di numeri. Normalmente, tali altezze sono considerate solo come un'utile strumento per dimostrare certi risultati di finitezza, come ad esempio il celebre teorema di Faltings riguardante i punti razionali delle curve di genere almeno due. D'altro canto, il valore esplicito di tali altezze ha suscitato grande interesse, a partire dalla congettura di Birch e Swinnerton-Dyer che lega il valore speciale al centro della banda critica della funzione L di una curva ellittica definita su un campo di numeri con l'altezza di Néron-Tate dei generatori del suo gruppo di punti razionali.
D'altro canto, per misurare la complessità di un numero algebrico, possiamo guardare la taglia dei coefficienti del suo polinomio minimo, che è misurata dalla cosiddetta altezza di Weil logaritmica. Tale altezza si può anche ritrovare andando a calcolare la media geometrica del suddetto

polinomio minimo ristretto al cerchio unitario. Il logaritmo di questa media geometrica, noto come misura di Mahler, rappresenta uno dei miei interessi di ricerca principali. In particolare, come discusso nella prossima sezione, l'analogo di questo invariante per polinomi in più variabili è spesso legato a valori speciali di funzioni L.

[Misure di Mahler e valori speciali di funzioni L]

Introdotta da Pierce e Lehmer circa un secolo fa, e poi generalizzata da Mahler a polinomi in più variabili, la misura di Mahler di un polinomio è definita come il logaritmo della sua media geometrica sul toro unitario. Nonostante la facile definizione, tale invariante rimane per molti aspetti misterioso. In particolare, rimane aperta la domanda posta da Lehmer, riguardo alla possibile esistenza di una sequenza di polinomi in una variabile, a coefficienti interi, le cui misure di Mahler siano strettamente positive ma tendano a zero.
Ci si aspetta, a dire il vero, che tale possibilità non si realizzi. Questa aspettativa è corroborata dal fatto che, come mostrato da Boyd, essa sarebbe verificata se l'insieme di tutti i numeri reali che si possono esprimere come la misura di Mahler di un polinomio fosse chiuso. Tale nuova congettura di Boyd viene a sua volta dal fatto che simili insiemi di altezze, come ad esempio l'insieme dei numeri di Pisot, si possono dimostrare essere chiusi. Pertanto, il solo interesse per le misure di Mahler di polinomi in una variabile, che sono intimamente legate alle altezze di Weil, e dunque a problemi di natura prettamente diofantea, porta naturalmente allo studio di misure di Mahler in più variabili.
Il legame sopra menzionato fra il problema di Lehmer e le misure di Mahler in più variabili è dovuto al fatto che ogni misura di Mahler in più variabili può esprimersi come limite di misure di Mahler di polinomi in una variabile ottenuti tramite sostituzioni monomiali, come mostrato da Lawton. Nel mio lavoro in comune con Brunault, Guilloux e Mehrabdollahei, descritto più avanti, abbiamo generalizzato tale risultato, considerando sostituzioni monomiali più generali.
Questi legami fra problemi diofantei e misure di Mahler in più variabili portarono Smyth a calcolare esplicitamente i primi esempi di misure di Mahler in più variabili. Egli calcolò in particolare che la misura di $P=x+y+1$ è uguale al valore speciale in $s=-1$ della funzione L associata al carattere quadratico di Dirichlet di discriminante $d=-3$, mentre la misura di Mahler di $P=x+y+z+1$ è un multiplo intero del valore speciale della funzione zeta di Riemann in $s=-2$, che corrisponde, attraverso l'equazione funzionale, al celebre numero di Apèry. Tali calcoli spinsero poi Boyd ad investigare numericamente le misure di Mahler di svariate famiglie di polinomi di Laurent in due variabili, come ad esempio $P = x + 1/x + y + 1/y + k$. In quest'ultimo caso, il luogo degli zeri di P è birazionale ad una curva ellittica, e la misura di Mahler di tale polinomio sembra, dagli esperimenti numerici, essere un multiplo razionale del valore speciale in $s=0$ della funzione L associata a tale curva ellittica.
Questo legame trovato da Boyd è stato poi spiegato dal lavoro di Deninger e Rodriguez-Villegas. Il secondo ha legato le misure di Mahler in questione a delle serie di Eisenstein-Kronecker, che si trovano a loro volta in certi casi ad essere legate ai valori speciali delle funzioni L associate alle curve ellittiche, come dimostrato ad esempio da Goncharov e Levin. D'altro canto, il lavoro di Deninger lega, sotto un'ipotesi di natura tecnica, la misura di Mahler di polinomi in qualunque numero di variabili all'integrale del regolatore di Beilinson di una certa classe di coomologia motivica su una catena topologica esplicita. Il regolatore sopra menzionato può essere considerato, per molti aspetti, come un'altezza che misuri la complessità aritmetica dei cicli definiti su una varietà algebrica, generalizzando l'altezza di Néron-Tate. In particolare, Beilinson ha congetturato che tutti i valori speciali di funzioni L siano multipli razionali di matrici le cui entrate sono proprio regolatori come quello sopra menzionato. Nel caso del valore in $s=0$ di una curva ellittica, tale matrice è unidimensionale, e dunque il lavoro di Deninger permette di dimostrare la congettura di Boyd assumendo le congetture di Beilinson, come mostrato da Bornhorn.
Come spiegato più avanti, il mio lavoro in corso con Brunault mira a generalizzare il lavoro di Deninger sopra menzionato, trovando nuovi valori speciali da legare alla misura di Mahler di un

polinomio, che non appaiano immediatamente nell'ipersuperficie associata al polinomio stesso. In particolare, tale lavoro generalizza risultati precedenti di Maillot e Lalín, i quali a loro volta permettevano di dare una spiegazione geometrica alle identità di Smyth.
Per trovare le relazioni numeriche fra le misure di Mahler di tali polinomi e i valori speciali delle funzioni L sperate, usiamo un algoritmo che permette di calcolare la misura di Mahler di un polinomio tramite l'integrale unidimensionale di una funzione determinata da un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti polinomiali. Tale algoritmo è oggetto di un mio progetto in corso, in collaborazione con Ringeling, descritto più avanti.
Durante la mia tesi di dottorato, invece, ho studiato il problema di costruire dei polinomi la cui misura di Mahler sia legata ad un valore speciale fissato. In particolare, ho analizzato i valori in s=0 delle funzioni L associate a curve ellittiche con moltiplicazione complessa definite sui numeri razionali, definendo loro modelli planari le cui misure di Mahler sono effettivamente legate al valore speciale in questione, a meno di un multiplo razionale e del logaritmo di un numero algebrico.

[Campi di divisione e moltiplicazioni complesse]

Il fatto che tali polinomi si possano costruire per curve ellittiche con moltiplicazione complessa è intimamente legato alla semplicità dell'aritmetica dei loro punti di torsione. Più precisamente, i campi di numeri generati dalle coordinate di tali punti sono sempre estensioni abeliane del campo di definizione degli endomorfismi della curva ellittica in questione, il che consente di studiare tali campi, e la rappresentazione di Galois a loro associata, in modo molto più completo rispetto ad una curva ellittica qualsiasi. In questo filone si situa il problema di descrivere esplicitamente le immagini possibili delle rappresentazioni di Galois (finite, locali o adeliche) associate a tali curve ellittiche.
Nel mio primo lavoro in comune con Campagna, abbiamo dato una descrizione esplicita dell'immagine di tali rappresentazioni adeliche associate alle curve ellittiche con moltiplicazione complessa definite sui numeri razionali, e abbiamo inoltre studiato varie condizioni che ci consentono di descrivere completamente, o perlomeno di limitare, le immagini delle rappresentazioni adeliche associate a curve ellittiche con moltiplicazione complessa definite su campi di numeri qualsiasi. In particolare, riusciamo a limitare e a descrivere le relazioni inaspettate (il cosiddetto "intrecciamento" o "*entanglement*") fra i differenti campi di divisione di una curva ellittica con moltiplicazione complessa.
Nel mio secondo lavoro in comune con Campagna, abbiamo inoltre trovato una formula esplicita per l'indice dell'immagine della rappresentazione adelica associata ad una curva ellittica con moltiplicazione complessa, definita su un qualunque campo di numeri.
Come spiegato più avanti, tali risultati lasciano aperte diverse questioni relative all'esistenza di curve ellittiche la cui immagine di Galois sia la più piccola possibile, facendo sorgere anche domande naturali nel contesto delle varietà abeliane di dimensione superiore.

[Proprietà diofantee dei valori speciali di funzioni L]

I legami precedentemente menzionati fra misure di Mahler e valori speciali di funzioni L si inseriscono in un panorama di relazioni, dimostrate o congetturali, fra altezze e valori speciali. Fra di esse ricordiamo la già citata congettura di Birch & Swinnerton-Dyer, generalizzata dalle congetture di Beilinson e Bloch & Kato, nonché la formula di Gross & Zagier, che consente di dimostrare le congetture di Birch & Swinnerton-Dyer per curve ellittiche di rango basso. Inoltre, la congettura di Colmez lega derivate logaritmiche di funzioni L all'altezza di Faltings delle varietà abeliane con moltiplicazione complessa.
Tutti questi legami portano naturalmente a voler trasportare le proprietà diofantee che definiscono il concetto di altezza ai valori speciali delle funzioni L. Più precisamente, si potrebbe dire che un'altezza è una funzione a valori reali (o più generalmente, a valori in un gruppo abeliano

ordinato) che soddisfi le proprietà di Northcott (finitezza degli insiemi di oggetti di altezza limitata), Bogomolov (i valori dell'altezza hanno un minimo isolato) oppure Lehmer (proprietà di Bogomolov per una versione modificata dell'altezza).
Nel mio lavoro in comune con Pazuki, descritto in profondità più avanti, abbiamo dimostrato come la proprietà di Northcott sia anche soddisfatta dalla funzione che associa ad un oggetto aritmetico (più precisamente, un motivo puro) il valore speciale della sua funzione L in un intero a scelta. Inoltre, abbiamo fatto vedere come la cardinalità degli insiemi finiti ottenuti si possa limitare in modo effettivo quando restringiamo il campo alle funzioni zeta di Dedekind dei campi di numeri. Tali risultati, come vedremo più avanti, portano alla formulazione di domande naturali relative ai valori speciali delle funzioni L associate a motivi misti, legati in particolare alle altezze dei motivi recentemente introdotte da Kato. Alcune di queste domande fanno parte di un progetto in corso con Caro e Pazuki, descritto più avanti.

[Congetture standard in geometria di Arakelov]

Le altezze sopra menzionate possono essere anche interpretate come un analogo aritmetico del grado di una varietà algebrica. Più precisamente, Gillet e Soulé hanno mostrato come, arricchendo i cicli algebrici tracciati su una varietà X definita sugli interi di una corrente di Green "all'infinito", si possa definire un anello di Chow aritmetico associato ad X, dotato, nel caso in cui X sia proiettiva, di un grado aritmetico, ovvero di una mappa che associa ad ogni ciclo zero dimensionale un numero reale. Ciò permette di associare ad ogni fibrato in rette metrizzato definito su X un'altezza, definita su una sottovarietà Y essenzialmente come il grado aritmetico dell'intersezione fra la classe associata ad Y e la potenza corrispondente del fibrato in rette.
Tale definizione portò naturalmente Gillet e Soulé a considerare analoghi aritmetici della nozione di ampiezza, studiati anche da Zhang, e delle congetture standard, che predicono certi comportamenti di positività per le intersezioni con potenze successive della prima classe di Chern del fibrato in rette in questione, quando esso è aritmeticamente ampio.
Nel mio progetto in corso con Dolce e Gualdi, descritto più avanti, ambiamo a dimostrare tali congetture per alcune varietà con decomposizione cellulare, fra cui gli spazi proiettivi (per i quali abbiamo una caratterizzazione completa dei fibrati metrizzati che soddisfano le conclusioni delle congetture standard) e le Grassmanniane. Inoltre, vorremmo approcciare con tecniche simili le congetture standard per varietà toriche.

[Teoria di Iwasawa e grafi]
La misura di Mahler, già comparsa più volte in questo resoconto dei miei interessi di ricerca, ammette degli analoghi p-adici, per i quali la media geometrica calcolata come integrale sul toro unitario complesso viene sostituita da una media geometrica calcolata con qualche forma di integrale p-adico. Tale invariante può essere un numero p-adico esso stesso (se il logaritmo che si integra è proprio il logaritmo p-adico), oppure un numero reale, se integriamo il logaritmo del valore assoluto. In quest'ultimo caso, Ueki ha dimostrato come la misura di Mahler p-adica del polinomio di Alexander associato ad un nodo consenta di recuperare il coefficiente direttore delle formule che descrivono la valutazione p-adica della cardinalità del sottogruppo di torsione del primo gruppo di omologia all'interno di una torre di ricoprimenti del complemento del nodo in questione.
In un lavoro recente in collaborazione con Vallières, abbiamo generalizzato questo risultato alla teoria di Iwasawa delle torri finite dei grafi, mostrando come in questo caso la cardinalità del gruppo delle classi di una torre di grafi il cui gruppo di Galois sia isomorfo agli interi possa essere studiata guardando le radici complesse e p-adiche di un polinomio associato a tale torre, che ha coefficienti interi e dipende da una sola variabile.

[Geometria diofantea ed intersezioni anomale]
Come menzionato in precedenza, le altezze sono spesso utili strumenti in geometria diofantea. In particolare, la proprietà di Northcott di varie altezze è spesso stata utilizzata per dimostrare la finitezza di certi insiemi di oggetti aritmetici, come ad esempio l'insieme dei punti razionali su una curva di genere almeno due, oggetto della congettura di Mordell, dimostrata da Faltings.
Questo teorema si inserisce all'interno del vasto panorama delle cosiddette intersezioni anomale (cioè di dimensione più elevata rispetto a quella aspettata) fra sottogruppi di una varietà abeliana e sottovarietà della stessa varietà abeliana che siano trasverse, vale a dire non contenute in nessun traslato di un sottogruppo. In particolare, Bombieri, Masser e Zannier hanno congetturato che le intersezioni anomale di questo tipo che siano anche massimali dovrebbero essere in numero finito. Tale congettura è essenzialmente equivalente alle congetture di Zilber e Pink, le quali si generalizzano anche a varietà di altro tipo, come ad esempio le varietà di Shimura. Casi particolari della congettura di Bombieri, Masser e Zannier (nota anche come congettura della torsione anomala) includono la congettura di Manin e Mumford (dimostrata da Raynaud) e la congettura di Mordell e Lang (dimostrata da Faltings e Vojta).
Nel mio articolo con Viada, descritto più avanti, abbiamo dimostrato dei criteri di irriducibilità per preimmagini di varietà trasverse, che si legano intimamente alle congetture sopra menzionate. Inoltre, stiamo lavorando su una versione esplicita della congettura di Bombieri, Masser e Zannier per sottovarietà che sono intersezioni complete, e su un'applicazione del lavoro recente di Galateau e Martínez per determinare in modo esplicito i punti di torsione che giacciono su certe famiglie di curve.

**DESCRIZIONE DELLE PUBBLICAZIONI**

[R. Pengo, "Mahler's measure and elliptic curves with potential complex multiplication"]
In questo articolo, data una curva ellittica E definita sui numeri razionali che abbia moltiplicazione complessa, costruiamo un suo modello planare la cui misura di Mahler è data dalla somma di un logaritmo di un numero algebrico e di un multiplo razionale del valore speciale in s=0 della funzione L associata ad E. Tali modelli planari sono costruiti a partire dalle funzioni definite da Deninger & Wingberg, e da Rohrlich, le quali consentono di dimostrare una versione debole delle congetture di Beilinson per le curve ellittiche con moltiplicaizone complessa.

[F. Campagna & R. Pengo, "Entanglement in the family of division fields of elliptic curves with complex multiplication"]
In questo articolo studiamo le relazioni che intercorrono nella famiglia dei campi generati dai punti di torsione di curve ellittiche con moltiplicazioni complesse. In particolare, limitiamo esplicitamente l'insieme finito dei numeri primi p per i quali i campi di divisione p-adici corrispondenti non sono linearmente disgiunti. Inoltre, diamo una condizione necessaria affinché la famiglia finita rimanente non sia linearmente disgiunta, e descriviamo esplicitamente tutte le relazioni che intercorrono in tale famiglia per curve ellittiche definite sui numeri razionali. Quest'ultimo teorema ci permette di descrivere esplicitamente l'immagine della rappresentazione di Galois adelica associata alle curve ellittiche definite sui numeri razionali che abbiano moltiplcazioni complesse, risolvendo così il "programma B" di Mazur per queste curve. Per dimostrare questi risultati, utilizziamo una descrizione esplicita degli endomorfismi dei gruppi formali associati alle curve con moltiplicazione complessa, dovuta a Streng, e generalizziamo un risultato precedente di Coates & Wiles.

[F. Pazuki & R. Pengo, "On the Northcott property for special values of L-functions"]
In questo articolo studiamo la distribuzione dell'insieme dei valori speciali associati a diverse famiglie di funzioni L. In particolare, dimostriamo che, assumendo che le funzioni L in questione soddisfino l'equazione funzionale sperata, i valori speciali alla sinistra della banda critica delle funzioni L associate a motivi puri di peso fissato soddisfano la proprietà di Northcott. In altri termini, l'insieme delle classi di isomorfismo di tali motivi che abbiano

un valore speciale a sinistra della banda critica limitato è finito. Quando tali motivi corrispondono a campi di numeri, limitiamo esplicitamente la cardinalità degli insiemi finiti in questione. Per dimostrare tali risultati,

[F. Campagna & R. Pengo, "How big is the image of the Galois representations attached to CM elliptic curves?"]

In questo articolo dimostriamo come l'indice dell'immagine della rappresentazione adelica associata ad una curva ellittica con moltiplicazione complessa, visto come sottogruppo dei punti adelici del gruppo di Mumford-Tate associato, possa essere calcolato per mezzo di una formula esplicita, che generalizza lavori di Lombardo e Bourdon & Clark. Tale formula, dimostrata per mezzo della teoria classica della moltiplicazione complessa, è stata implementata in SAGEMath.

[F. Brunault, A. Guilloux, M. Mehrabdollahei & R. Pengo, "Limits of Mahler measures in multiple variables"]

In questo articolo mostriamo come certe sequenze di sostituzioni monomiali consentano di ottenere, a partire da un polinomio fissato P, sequenze di polinomi le cui misure di Mahler convergono alla misura di Mahler di P, dando anche una stima esplicita del termine di errore in tale convergenza, ed un'espansione asintotica in un caso specifico. Tali risultati forniscono una comprensione maggiore delle sequenze di Cauchy all'interno dell'insieme delle misure di Mahler di polinomi a coefficienti interi, il quale dovrebbe essere chiuso, stando ad una congettura formulata da Boyd, che implicherebbe una soluzione non effettiva del cosiddetto problema di Lehmer sulle misure di Mahler di polinomi in una variabile.

[R. Pengo & D. Vallières, "Spanning trees in Z-covers of a finite graph and Mahler measures"]

In questo articolo mostriamo come sia possibile studiare la variazione del numero di alberi coprenti in una torre di grafi finiti indicizzata dai numeri interi per mezzo del cosiddetto polinomio di Ihara associato a tale torre. In particolare, il termine dominante di tale variazione può essere calcolato tramite la misura di Mahler p-adica di tale polinomio, che misura la distribuzione p-adica delle sue radici. Tramite questo risultato generale, recuperiamo svariati risultati particolari già presenti in letteratura, come ad esempio una formula dovuta a Lengyel che calcola esplicitamente la valutazione p-adica dei numeri di Fibonacci.

[R. Pengo & E. Viada, "Irreducibility criteria for the preimages of a transverse variety under endomorphisms of products of elliptic curves"]

In questo articolo mostriamo un criterio di irriducibilità per preimmagini attraverso endomorfismi diagonali di sottovarietà trasverse (ovvero, non contenute in traslati di sottogruppi) di un prodotto di curve ellittiche. Diamo due dimostrazioni di questo risultato. La prima, valida per curve, usa metodi aritmetici, apparsi originariamente nello studio della congettura della torsione anomala, dovuta a Bombieri, Masser e Zannier. La seconda, di natura geometrica, è valida per sottovarietà di qualunque dimensione. Infine, mostriamo come tali risultati abbiano applicazioni per le stime delle altezze normalizzate e dei minimi essenziali di certe sottovarietà.

**DESCRIZIONE DEI PROGETTI DI RICERCA IN CORSO**

[F. Brunault & R. Pengo, "Mahler measures of successively exact polynomials"]

In questo progetto leghiamo le misure di Mahler di polinomi in più variabili alla geometria della varietà definita dall'unione del luogo degli zeri del polinomio in questione con il luogo degli zeri del suo reciproco, ottenuto valutando il suddetto polinomio nei reciproci delle variabili da cui dipende. Mostriamo in particolare che la misura di Mahler di un polinomio è un periodo della coomologia di Deligne della varietà V così ottenuta, la quale non è né liscia né propria. Pertanto, le varietà lisce e proprie ottenute come intersezioni successive delle componenti dei divisori ad incroci normali necessari per compattificare e desingolarizzare V forniscono un insieme di valori speciali che siano possibilmente legati alla misura di Mahler del polinomio preso in considerazione. Questo nostro lavoro generalizza perciò il lavoro di Deninger che per primo legò misure di Mahler e regolatori, integrando idee di Maillot e Lalín. In particolare, tale studio geometrico ci ha consentito di trovare polinomi le cui misure di Mahler sono legate, almeno numericamente, a valori speciali di funzioni L presi in punti diversi rispetto a quelli originariamente considerati nei lavori di Deninger, Boyd e Rodriguez-Villegas.

[P. Dolce, R. Gualdi & R. Pengo, "Standard conjectures in Arakelov geometry: the case of Grassmannians"]

In questo progetto studiamo le congetture standard in geometria di Arakelov, dovute a Gillet e Soulé, per varietà che ammettono una decomposizione cellulare, con particolare riferimento alle Grassmanniane.

Tali congetture predicono che l'anello di Chow aritmetico, introdotto dagli stessi Gillet e Soulé come analogo della teoria dell'intersezione usuale per varietà definite sui numeri interi, soddisfi un analogo delle congetture standard di tipo Lefschetz e Hodge-Riemann. Più precisamente, si congettura che l'intersezione iterata con le classi di Chern associate a fibrati in rette metrizzati che siano aritmeticamente ampi induca isomorfismi fra i gruppi di Chow aritmetici di grado complementare, e che tali isomorfismi inducano forme quadratiche definite positive sul sottospazio dei cicli primitivi, come accade nel caso geometrico.

Nel nostro progetto, caratterizziamo i fibrati in rette metrizzati sopra lo spazio proiettivo che soddisfano le conclusioni delle congetture standard, dimostrando in particolare la congettura di Gillet e Soulé per spazi proiettivi. Inoltre, stiamo studiando una caratterizzazione simile per le Grassmanniane, che passa da una nuova descrizione esplicita del loro anello di Chow aritmetico, la quale ci consente di attaccare le congetture standard usando tecniche provenienti dalla teoria di Hodge combinatoria, dovute a Elias & Williamson, Adiprasito, Huh & Katz, e Amini & Piquerez.

[J. Caro, F. Pazuki & R. Pengo, "Northcott properties for Dedekind zeta functions in the critical strip"]

In questo progetto, studiamo la proprietà di Northcott per i valori speciali delle funzioni zeta di Dedekind presi in punti non interi. In particolare, ci concentriamo sui punti all'interno della banda critica, generalizzando un lavoro precedente di Généreaux e Lalín. Più precisamente, arriviamo a mostrare che l'insieme dei caratteri di Dirichlet quadratici la cui funzione L ha un valore speciale limitato in un punto la cui parte reale sia strettamente compresa fra ½ ed 1 ha densità strettamente positiva, contraddicendo in modo molto forte la validità della proprietà di Northcott, e anche quella di Bogomolov. Tale dimostrazione utilizza un risultato esplicito di Stankus sulla distribuzione dei valori speciali delle funzioni L associate a caratteri di Dirichlet quadratici. Inoltre, generalizzando un'altra tecnica dovuta a Soundararajan, puntiamo a mostrare come la proprietà di Northcott non sia valida nemmeno sulla retta critica. Infine, supponendo la validità dell'ipotesi di Riemann generalizzata per le funzioni zeta di Dedekind in questione, puntiamo a mostrare come la proprietà di Northcott resti valida nella parte sinistra della banda critica, perlomeno se consideriamo le funzioni zeta completate con i fattori di Eulero archimedei.

[R. Pengo & B. Ringeling, "Computing Mahler measures via differential equations"]

In questo progetto puntiamo a mostrare come calcolare numericamente le misure di Mahler dei polinomi usando le equazioni differenziali lineari a coefficienti polinomiali soddisfatte dagli integrali di certe funzioni razionali associate ai polinomi in questione. Più precisamente, vogliamo implementare il calcolo di tali equazioni differenziali usando da un lato il metodo della "telescopia creativa", e dall'altro un algoritmo più geometrico dovuto a Lairez. Infine, ci prefiggiamo di studiare la complessità di tali algoritmi, e di paragonarla a metodi già esistenti.

[R. Pengo & E. Viada, "The effective Torsion Anomalous Conjecture"]

In questo progetto vogliamo studiare una versione effettiva della congettura della torsione anomala, proposta da Bombieri, Masser e Zannier. Più precisamente, puntiamo ad utilizzare metodi geometrici per mostrare come le intersezioni anomale massimali fra sottogruppi e una sottovarietà trasversa V che sia intersezione completa siano sempre originate da sottogruppi contenuti nel sistema lineare delle ipersuperfici la cui intersezione definisce V. Ciò ci consentirebbe, grazie ad un risultato recente di Galateau e Martínez, di limitare esplicitamente il grado di tali sottogruppi, e quindi di dare una risposta effettiva alla domanda di Bombieri, Masser e Zannier, perlomeno per certe sottovarietà che sono intersezioni complete.

**DESCRIZIONE DEI PIANI DI RICERCA FUTURI**

[Problemi inversi per misure di Mahler]

L'obiettivo di questo progetto sarebbe di costruire, a partire da certi valori speciali di funzioni L, un polinomio la cui misura di Mahler sia legata al valore speciale in questione, ad esempio essendo un suo multiplo razionale. Tale domanda può essere vista come l'inverso delle investigazioni cominciate da Boyd e Deninger, e continuate nel mio lavoro in corso con Brunault, il cui obiettivo è di partire da un polinomio e legare la sua misura di Mahler a certi valori speciali di funzioni L.

Gli esempi principali nei quali questo metodo potrebbe avere successo sono costituiti dai valori speciali delle funzioni L associate a caratteri di Dirichlet oppure a curve ellittiche con moltiplicazione complessa. In entrambi i casi, una versione debole ma esplicita delle congetture di Beilinson è stata dimostrata. Più precisamente, il lavoro di Beilinson stesso (più tardi integrato da Neukirch ed Esnault) ha permesso di dimostrare le sue congetture nel caso dei caratteri di Dirichlet, mentre il lavoro di Deninger ha permesso di dimostrarne una versione debole ma completamente esplicita per le curve con moltiplicazione complessa.

A partire da queste costruzioni, e da una variante della prima dovuta a Huber e Kings, si dovrebbe riuscire a costruire n-uple di funzioni associate al valore speciale in questione in $s = 1-n$ nel caso delle funzioni di Dirichlet, e $s=2-n$ nel caso delle funzioni associate a curve ellittiche con moltiplicazione complessa. Usando tali funzioni, ed un polinomio P che le annulli, vorremmo riuscire a garantire che le componenti della varietà data dall'intersezione fra le ipersuperfici definite da P e dal suo reciproco si intersechino o in alcuni punti definiti sul campo quadratico determinato dal carattere di Dirichlet, oppure nella curva ellittica in questione. Tali intersezioni sono infatti esattamente quelle che compaiono nel mio lavoro in comune con Brunault, il quale essenzialmente determina i valori speciali che possono apparire legati ad una data misura di Mahler.

Allora, una comparazione fra i regolatori calcolati nei lavori di Huber & Kings e Deninger, e i regolatori trovati dalle costruzioni menzionate sopra dovrebbero legare la misura di Mahler di P al valore speciale delle funzioni L in questione.

[Velocità di convergenza di limiti di misure di Mahler]

In questo progetto vorremmo trovare la velocità di convergenza dei limiti di misure di Mahler studiati nel lavoro in comune con Brunault, Guilloux e Mehrabdollahei. Sembra che tale velocità sia intimamente legata alla geometria dell'insieme algebrico reale dato dai punti del toro unitario su cui il polinomio in questione svanisce. In particolare, sembrerebbe che gli zeri del polinomio di Bernstein-Sato associato a questo insieme, e quindi i poli della funzione zeta di Igusa associata al nostro polinomio possano essere cruciali per determinare la velocità di convergenza. Un'altra strategia possibile riguarderebbe lo studio dei coefficienti di Fourier associati a polinomi della forma $P P^* + \varepsilon$, dove $P^*$ è il reciproco di P, ed $\varepsilon > 0$. Tali polinomi non svaniscono sul toro unitario, e i coefficienti di Fourier dei logaritmi dei loro valori assoluti, studiati ad esempio nei lavori di Permantle & Wilson, potrebbero dare un altro modo di attaccare questo problema.

[Misure di Mahler e trascendenza]

L'obiettivo di questo progetto sarebbe di descrivere esplicitamente un analogo motivico delle misure di Mahler, come fatto da Brown per i valori zeta multipli o per gli integrali di Feynmann. In particolare, sembrerebbe da varie considerazioni che le misure di Mahler possano fare parte dei periodi monodromi (ovvero "*single-valued periods*", in lingua inglese), studiati da Brown e Dupont. L'espressione delle misure di Mahler come periodi motivici permetterebbe di calcolare esplicitamente l'azione del gruppo di Galois motivico su di esse, come fatto ad esempio per i valori zeta multipli. Infine, questo calcolo permetterebbe, assumendo la validità della congettura dei periodi, di calcolare esplicitamente il grado di trascendenza di un campo generato da alcune misure di Mahler.

Notiamo che quest'ultimo problema potrebbe a priori essere approcciato anche studiando i limiti descritti nella sezione precedente. Più precisamente, ogni misura di Mahler è limite di numeri trascendenti, dati dai logaritmi di certi numeri algebrici. Pertanto, se si riuscisse a dimostrare che tali limiti non distruggono la natura trascendente dei numeri in questione, si arriverebbe alla dimostrazione della trascendenza di svariate misure di Mahler, e quindi di svariati valori speciali di funzioni L. Per fare ciò, servirebbe dimostrare una versione "in famiglia" delle stime esistenti (dovute, ad esempio, a Waldschmidt) per i valori assoluti delle forme lineari in logaritmi.

[Altezze motiviche e valori speciali di funzioni L]

L'obiettivo di questo progetto, nato dal mio lavoro in comune con Pazuki, sarebbe di trovare dei collegamenti fra le altezze motiviche definite recentemente da Kato ed i valori speciali di certe funzioni L. Per fare ciò nel caso dei motivi misti si dovrebbe probabilmente ricorrere alle funzioni L multiple associate a tali motivi, recentemente introdotte da Brown.

Supponendo di riuscire nel trovare un collegamento fra i valori speciali di queste ultime e le altezze definite da Kato, diventerebbe dunque molto interessante studiare la validità della proprietà di Northcott per funzioni L multiple, specialmente considerando il fatto che la validità della proprietà di Northcott per le altezze di Kato associate a motivi misti i cui costituenti puri sono fissati implicherebbe, come dimostrato da Kato stesso, un analogo del teorema di Mordell-Weil in coomologia motivica.

[Curve ellittiche con moltiplicazione complessa ed immagine minimale]

In questo progetto, nato dal mio lavoro in comune con Campagna, ambiamo a trovare, per ogni ordine O in un campo immaginario quadratico K diverso da Q(i), una curva ellittica definita sul campo delle classi di O che abbia moltiplicazione complessa per O e il cui campo di divisione massimale, generato dalle coordinate di tutti i punti di torsione della curva ellittica, sia uguale alla massima estensione abeliana di K. L'esistenza di una curva ellittica con queste proprietà è stata da noi dimostrata nel nostro primo lavoro, il quale contiene anche un algoritmo esplicito per trovare una tale curva. Ciò nondimeno, sarebbe interessante avere una formula esplicita per questo tipo di curve, dato che ciò permetterebbe anche di studiare più esplicitamente le immagini delle rappresentazioni di Galois associate ad altre curve con moltiplicazione complessa. Inoltre, sarebbe interessante capire se una tale curva con immagine di Galois minimale ammetta un modello definito sul campo minimale Q(j), generato sui numeri razionali a partire dal solo j-invariante dell'ordine O.

[Congetture standard in geometria di Arakelov: sezioni piccole, gruppi di Chow-Arakelov e varietà toriche]

L'obiettivo di questo progetto, originato dal lavoro in comune con Dolce e Gualdi, sarebbe di trovare delle caratterizzazioni dei fibrati in rette definiti su varietà aritmetiche (o perlomeno su quelle varietà aritmetiche che ammettono una decomposizione cellulare) che soddisfano le conclusioni della congettura standard di Gillet e Soulé in termini delle sezioni di norma piccola di tali fibrati. Per fare ciò, vogliamo ispirarci al lavoro di Yuan, il quale dimostra un analogo della diseguaglianza di Siu in geometria di Arakelov, per dare una caratterizzazione della condizione di grossezza di un fibrato in rette metrizzato. Tale diseguaglianza è stata recentemente  generalizzata in grado superiore da Song, il che potrebbe essere particolarmente utile per la caratterizzazione da noi sperata.

Vorremmo inoltre mostrare che per caratterizzare i fibrati in rette metrizzati che soddisfano le conclusioni della congettura di Gillet e Soulé possa essere necessario controllare la validità di tali conclusioni solamente su un sottoanello dell'anello di Chow aritmetico che sia finitamente generato. Per fare ciò, vorremmo ispirarci alla dimostrazione di Künnemann relativa al fatto che un fibrato in rette metrizzato la cui curvatura sia una (1,1)-forma di Kähler ω soddisfa le congetture di Gillet e Soulé se e solamente se le soddisfa relativamente al gruppo di Chow-Arakelov costruito proprio a partire da ω, il quale è (almeno congetturalmente) finitamente generato.

Infine, vorremmo usare questi risultati per approcciare il suddetto problema di caratterizzazione dei fibrati in rette che soddisfano le conclusioni della congettura di Gillet e Soulé per le varietà toriche. Per fare ciò ci prefiggiamo di dare una presentazione esplicita dei diversi anelli di Chow-Arakelov che possono essere associati ad una tale varietà torica, generalizzando quindi la presentazione esplicita dell'anello di Chow geometrico dovuta a Danilov.

[Torri adeliche di grafi e campi di numeri]

Il primo obiettivo di questo progetto, originato dal mio lavoro in comune con Vallières, sarebbe di generalizzare i nostri risultati a torri di grafi i cui gruppi di Galois siano più generali rispetto al gruppo degli interi. Esempi includono torri p-adiche o, in maniera ancor più interessante, torri adeliche, con gruppi di Galois isomorfi a potenze del completamento profinito degli interi. Per fare ciò, vorremmo capire come gli analoghi dell'elemento di Ihara definiti per queste torri possano consentire di studiare il cambiamento della cardinalità del gruppo delle classi di tali grafi.

Inoltre, vorremmo capire se questi risultati si possono generalizzare a campi di numeri, ad esempio associando ad una torre di questi ultimi una famiglia di grafi i cui gruppi delle classi coincidano con i gruppi delle classi dei campi di numeri in questione.

| Data | 21/01/2024 | Luogo | Hannover, Germania |
|---|---|---|---|